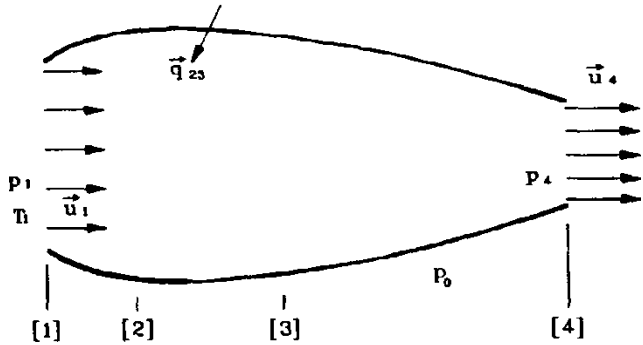
5.1-8-есеп. Дыбыс жылдамдығына дейінгі реактивті қозғалтқыш (двигатель)

Қысымы p_1, температурасы T_1 және жылдамдығы u_1 дыбыс жылдамдығынан кіші ауа [1] қима (ауданы S_1) арқылы реактивті қозғалтқыштың диффузорына ағып кіреді. Ауа [1] және [2] қималардың аралығында p_1-ден p_2-ге дейінгі қысымда изоэнтропиялық сығылады. Жану камерасы орналасқан [2] және [3] қималар арасында $q_{23} = 300$ кДж/кг шамасында жылу бөлінеді. [3] қимадан [4] қимаға дейінгі ағысты да изоэнтропиялық деп санауға болады. p_1 және p_4 қысымдары қоршаған ортаның қысымына p_0 тең.



Сурет 170

Осы жағдайда:

a) ауаның жану камерасына кіреберістегі жылдамдығын u_2, сонымен қатар температурасын T_2 және тығыздығын ρ_2 анықтау қажет;

b) жану камерасынан шығаберістегі жылдамдықты u_3, температураны T_3 және тығыздықты ρ_3 табыңыз;

c) қозғалтқыштан шығаберістегі жылдамдықты u_4 және тығыздықты ρ_4 анықтаңыз. Шығаберістегі қысымды былай

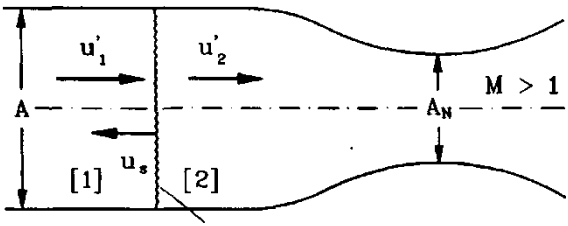
алыңыз $p_4 = p_0$. [1], [4] қималар арасындағы ағысты біртекті деп қозғалтқыштың күшін анықтаңыз.

Берілгендері: $u_1 = 300$ м/с, $p_2 = 1.25$ бар, $\gamma = 1.4$, $p_0 = 0.8$ бар, $A_1 = 1$ м^2, $T_1 = 273$ К, $q_{23} = 300$ кДж/кг, $R = 287$ Дж/(кг · К).

5.2. Газдың орнықталмаған ағысы. Соқпа толқын

5.2-1-есеп. Құбырдағы тік соқпа толқынның жылжуы

Лаваль түтігі арқылы Мах саны $M_1' = 0.6$ тең тұтқырсыз газ ағып шығып жатыр. [1] қимадағы қысым мен дыбыс жылдамдық (p_1, a_1), сонымен қатар қима ауданы да A белгілі. Құбырдың көлденең қимасының A_N дейін кенеттен кішіреюі түтікке кіреберіс қимадағы p_2 қысымды арттырып жібереді де соның әсерінен ағысқа қарсы тік соқпа толқын пайда болады (*суретті қараңыз*). Соқпа толқынның артында Мах саны $M_2' = u_2'/a_2'$ болатын орнықталған ағын туындайды. Сонда:



Сурет 171. Тік соқпа толқын

а) ағыстың кенеттен өзгеруі болатын кішірейген қиманың ауданын A_N табу керек;

б) критикалық қиманың ауданы $0.6A_N$ дейін кішірейген жағдай үшін Мах санын M_2' табу керек;

в) соқпа толқын үшін Мах санын M_s, толқынмен бірге қозғалатын координаталар жүйесіндегі Мах санын M_2, және дыбыс жылдамдықтарының қатынасын a_2/a_1 табу керек;

г) p_2-ні және T_2-ні табу керек.

Берілгендері: $\gamma = 1.4$, $R = 287$ Дж/(кг · К), $M_1' = 0.6$, $p_1 = 3$ бар, $T_1 = 300$ К, $A = 10$ см^2.

Шешуі

а) Критикалық қима A_N үшін $M_1' = 0.6$ кестеден келесіні аламыз:

$$\frac{A^*}{A} = \frac{A_N}{A} = 0.8416 \Rightarrow A_N = 8.416 \text{ см}^2.$$

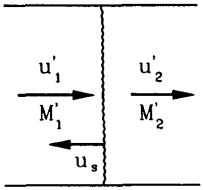
б) Өзгергеннен кейінгі Мах саны M_2:

Жаңа табылған қима ауданы $A^* = 0.6A_N$, сонда жаңа алынған аудандар қатынасы:

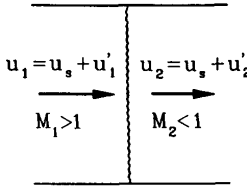
$$\frac{A^*}{A} = \frac{0.6A_N}{A} = 0.505 \Rightarrow M_2' \approx 0.31.$$

в) Толқынның Мах саны M_S, M_2 Мах саны, және жылдамдықтардың қатынасы a_2/a_1:

Толқынға дейінгі және толқыннан кейінгі Мах сандарын зертханалық есептеулерден анықтағаннан кейін M_1' және M_2', сәйкес жылдамдықтарды табамыз $u_1' = M_1'a_1$ және $u_2' = M_2'a_2$.



Сурет 172. Зертханалық жағдай



Сурет 173. Стационарлы толқын жүйесі

Стационарлы толқын жүйесіндегі Мах сандары:

$$M_1 = \frac{u_1}{a_1} = \frac{u_s + u'_1}{a_1} = \frac{u_s}{a_1} + \frac{u'_1}{a_1} = M_s + M'_1, \qquad (1)$$

$$M_2 = \frac{u_2}{a_2} = \frac{u_s + u'_2}{a_2} = \frac{u_s}{a_1}\frac{a_1}{a_2} + \frac{u'_2}{a_2} = \frac{a_1}{a_2} M_s + M'_2, \qquad (2)$$

(1) және (2) теңдікте – төрт белгісіз бар: M_S, M_1, M_2 және a_1/a_2. Дыбыс жылдамдықтарының қатынасы былай анықталады:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(\gamma+1)M_1}{\sqrt{\left(2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\right)\left(2 + (\gamma-1)M_1^2\right)}} \qquad (3)$$

және Мах саны:

$$M_2 = \left(\frac{\gamma + 1 + (\gamma-1)(M_1^2 - 1)}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}\right)^{1/2}. \qquad (4)$$

(1) қатынасты пайдаланып, (2) теңдіктегі M_S шамасынан құтыламыз:

$$M_2 - M_2' = \frac{a_1}{a_2} = (M_1 - M_1').$$

Алынған қатынасты (3) және (4) теңдіктерге қойып, M_1 үшін қажетті қатынасты аламыз. Сан мәндерін қоятын болсақ, табатынымыз: $M_1 = 1.17703$. (1) қатынастан толқынның Мах санын табамыз:

$$M_S = M_1 - M_1' = 0.58,$$

(2) қатынастан толқыннан кейінгі Мах санын анықтаймыз:

$$M_2 = 0.86,$$

және (3) қатынастан дыбыс жалдамдықтарының қатынасын есептейміз:

$$a_1/a_2 = 1.055.$$

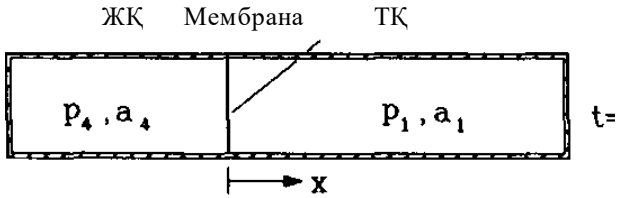
d) Соққыдан кейінгі қысым мен температура: M_1 саны белгілі болғандықтан кестеден p_2 және T_2 мәндерін табамыз:

$$p_2/p_1 = 1.45, T_2/T_1 = 1.1154 \Rightarrow p_2 = 4.35 \text{ бар}, \ \ T_2 = 334.6\text{К}.$$

5.2-2-есеп. Соққы тудыратын құбыр

Соққы құбыры жоғарғы қысымды (ЖҚ) бөлігі мен төменгі қысымды (ТҚ) бөлігін мембрана арқылы ажыратып тұратын ұзын цилиндрлік түтікшеден тұрады. Осы екі бөлігі параметрлері мынадай болатын p_1, a_1 және p_4, a_4 $(p_4 > p_1)$ газбен толтырылған.

Мембрананың кенеттен жарылуы соқпа толқынды ТҚ бөліктен ЖҚ бөлікке қозғалуға мәжбүрлейді. Соққы мен кеңею толқыны құбырдың шеткі қималарында ғана шағылады.



Сурет 174

Сонда:

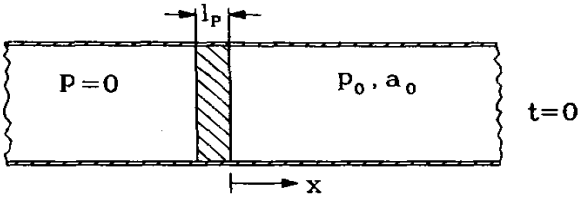
a) ағысты $x - t$-диаграммасына тұрғызыңыз;

b) Идеалды газ тұжырымдамасы бойынша ($\gamma_{ЖҚ} = \gamma_{ТҚ} = \gamma$ соққы және кеңею толқынының термодинамикалық қасиеттерін анықтайтын теңдікті жазыңыз.

Берілгендері: $p_1, a_1, p_4, a_4, \gamma$.

5.2-3-есеп. Поршеньнің түтік бойымен қозғалуы

Поршень (ұзындығы l_p, тығыздығы ρ_p) шексіз ұзын түтікте тыныштықта тұрған (p_0, a_0, γ) газды вакуумнан бөліп тұр. $t = 0$ уақыт мезетінде поршень кенеттен гоментропиялық кеңейген газдың қысымы әсерінен қозғала бастайды.



Сурет 175

Сонда:

a) $x - t$ даграммасында болатын құбылысты айқындап беріңіз;

b) поршень қысымы p_p мен жылдамдығы арасындағы байланысты анықтаңыз $u_p(t)$;

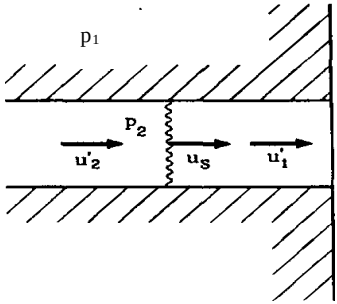
c) поршеньнің жылдамдығын уақытқа байланысты анықтаңыз. Поршеньнің ең үлкен жылдамдығы қандай?

d) ағыс жылдамдығы $u(x,t)$ мен дыбыс жылдамдығын a(x,t) қалай анықтаған болар едіңіз.

Берілгендері: p_0, a_0, γ, l_p, ρ_p.

5.2-4-есеп. Соқпа толқынның құбырдың ашық шетінен шағылуы

Идеалды газ (γ, R) диаметрі тұрақты құбырдан атмосфераға (p_1) тұрақты $u_1' < a_1$ жылдамдықпен ағып шығып жатыр. Осы шарттың өзгеруінен соқпа толқын пайда болады және ол құбыр бойымен қозғала бастайды, сонымен қатар қысымы p_2 дейін артады. $t = 0$ уақыт мезетінде соқпа толқын құбырдың ашық шетіне жетеді



Сурет 176

және толқыннан кейінгі ортаның қысымы қоршаған орта қысымына дейін азаяды p_1 ($p_3 = p_1$). Бұл құбыр бойымен орталық сиреу толқынының таралуынан қолдау тауып отырады. Сонда:

a) құбылысты $x - t$ диаграммасында бейнелеңіз;

b) M_2', a_2' және u_2' анықтаңыз;

c) M_3', a_3', u_3' және M_3' максимал шамасын анықтаңыз.

Берілгендері: $\gamma = 1.4$, $R = 287$ Дж/(кг · К), $p_2/p_1 = 1.513$, $M_1' = 0.3$, $T_1 = 300$ К.

5.2-5-есеп. Кеңейген құбыр қағидасы (принципі)

Идеалды газбен ($\gamma = 1.4$) толтырылған шексіз ұзын құбырдың $x = l$ қимасына өте жұқа мебрана орнатылған. Мембрананың оң жағындағы газдың қысымы p_1 және сол жағындағы газ параметрлері p_5 және a_5 берілген. Сол жағында құбыр арқылы соқпа толқын тарайды да қысымды p_5-тен p_4-ке дейін арттырады. Соқпа толқын мембранаға жетіп оны жарады. Нәтижесінде түйісу (контактный) жарылысы пайда болады да, мынадай жылдамдықпен тарайды $u_C = u_2' = u_3'$. Осыған сәйкес:

a) алғашқы соққының Мах санын M_{S1} анықтаңыз;

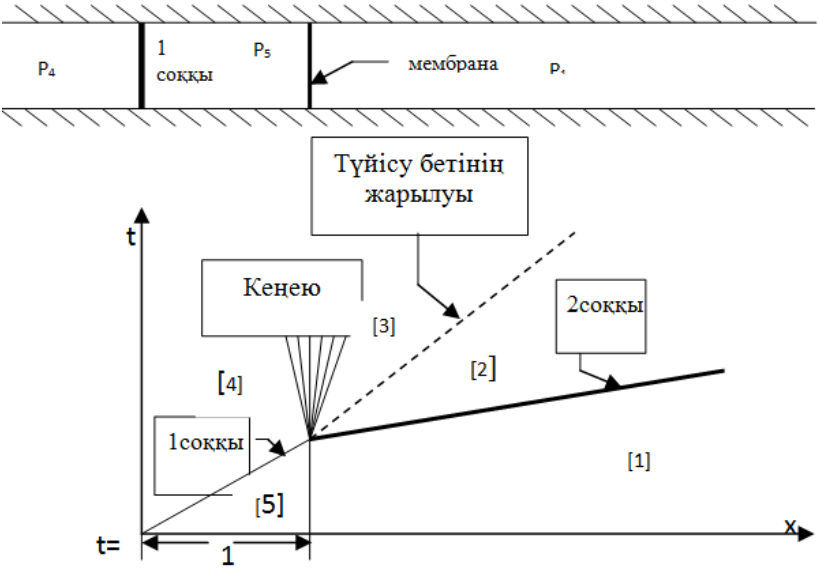
b) соққы мембранаға жетуі үшін қажетті t_0 уақытты анықтаңыз;

c) дыбыс жылдамдығын a_3 анықтаңыз;

d) түйіспелі жарылыстағы қысымды анықтаңыз;

e) екінші соққының Мах санын анықтаңыз;

f) дыбыс жылдамдығын a_1 анықтаңыз.



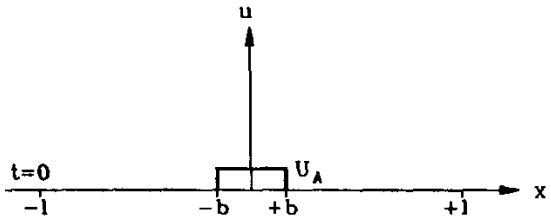
Сурет 177

Берілгендері: $p_1 = 1$ бар, $p_4 = 18$ бар, $p_5 = 4$ бар, $u_C = 575$ м/с, $a_5 = 300$ м/с, $l = 1$ м, $\gamma = 1.4$.

5.2-6-есеп. Жабық құбырдағы акустикалық толқынның таралуы

Ұзындығы $2l$, ішіне идеалды газ толтырылған құбырда ағыс жылдамдығының $u(x,t)$ және дыбыс жылдамдығының $a(x,t)$ бастапқы таралуы беріледі:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x > +b \\ U_A, & |x| \le b \\ 0, & x < -b \end{cases}$$



Сурет 178

Құбырдағы ағыс бірбағытты, ағыс жылдамдығы дыбыс жалдамдығынан аз деп есептеледі. Есепті сипаттауыштар әдісін пайдаланып шешу қажет. Сонда:

a) жылдамдық үшін қажетті шекаралық шарттарды анықтаңыз;

b) пайда болған толқу құбырдың шетіне жетпей тұрып ағыс жылдамдығын анықтаңыз. Ағыс жылдамдығы $u(0, t_0) = 0$ болатын t_0 уақытын табыңыз.

c) толқу құбыр шетінен шағылғаннан кейінгі ағыстың жылдамдығын анықтаңыз.

Берілгендері: U_A, a_4, l, b.

Жаттығулар

Сығылмайтын сұйық ағыстары.

1. Ұшақ 500 м биіктікте 180 м/с жылдамдықпен ұшып барады. Ұшақ 15 км биіктікке көтерілгенде 320 м/с жылдамдықпен ұша бастайды. Екі жағдайдағы Мах сандарын есептеңіз.

2. Реактивті ұшақ 10,5 км биіктікте 247,5 м/с жылдамдықпен ұшады. Ауа температурасы -54,4^{0}С және k=1,4. Мах санын анықтаңыз.

3. Ұшу кезінде ұшақ тұмсығындағы тежелу қысымы 48 кПа (абс). Егер тыныштықтағы ауа қысымы 27,6 кПа (абс) және температурасы -55^{0}С болса, онда ұшақтың жылдамдығы мен Мах санын табыңыз.

4. Қалыпты ауада а) 11.25 м/с, b) 24.75 м/с және с) 45 м/с жылдамдықпен қозғалатын автокөліктің Мах санын табыңыз.

5. Дене ауада 200 м/с жылдамдықпен қозғалады. Денедегі тежелу қысымын табыңыз. Ағысты а) сығылатын және б) сығылмайтын деп қарастырыңыз.

6. Ұшақ 3 км биіктікте М=1.5 ұшып өтеді. Ауа температурасы 20^{0}С тұрақты деп қарастырыңыз. Ауа мен ұшақтың жылдамдықтарын есептеңіз. Қарсы жел 30 м/с жылдамдықпен соғады. Ұшақ ұшып өткенде қанша уақыттан соң оның дыбысы жерге жетеді.

7. Дыбыс жылдамдығынан жоғары жылдамдықпен ұшатын ұшақ 3 км биіктікте 900 м/с жылдамдықпен ұшып барады. Ұшақ жер бетіндегі бақылаушының төбесінен ұшып өткен соң қанша уақыттан кейін бақылаушы оның дауысын естиді?

8. Ауа орнықталған түрде көлденең қимасы тұрақты құбырдан ағып өтеді. 1 қимасында ауа қысымы 60 psia, температурасы 600^{0}R, жылдамдығы 500 фут/с. Жылу алмасу мен үйкеліс нәтижесінде құбырдың төменгі бөлігіндегі 2 қимасында ауа қысымы 40 psia, температурасы 800^{0}R. 1 мен 2 қималары арасындағы ауаның 1 фунтына келетін жылу алмасуды табыңыз және 2 қимасындағы тежелу қысымын табыңыз.

9. Ауданы S=0.05 м^2 болатын ұзын түзу құбырдан өтетін ауаның орнықталған адиабаталық ағысы қарастырылсын. Кіреберіс қимада (1-қима) ауа қысымы 200 кПа (абс), температурасы 60^{0}С және жылдамдығы 146 м/с.

Төменгі бөлігіндегі 2-қимада қысым 95.6 кПа (абс), жылдамдық 280 м/с. Ағыс үшін p_{01} , p_{02} , T_{01} , T_{02} – анықтаңыз.

10. Ракета двигателің тежелу шарттары T_0=300K, p_0=45МПа (манометрлік). Критикалық жағдайлар Мах саны 1-ге тең болатын ракета соплосының өңешінде орын алады. Сопло өңешіндегі температураны, қысымды және ағыс жылдамдығын есептеңіз. Газды идеал деп қарастырыңыз: R=323 Дж/(кг*К), k=1.2.

Сығылатын сұйық ағыстары

11. Ауа орнықталған және изэнтропиялық түрде каналдан ағып жатыр. Көлденең қимасы 0.02 м^2 болатын бірінші қимада ауа қысымы 40 кПа (абс), температурасы 60^{0}С және Мах саны 2-ге тең. Екінші қимада жылдамдық 519 м/с. Екінші қимадағы Мах санын табыңыз.

12. Ауа T_0=350K температурада P_0=650 кПа қысыммен көлденең қимасы жіңішкеретін құбырдан изэнтропиялық түрде ағып өтеді. Құбырдың көлденең қимасының ауданы $2.6 \cdot 10^{-3}$ м^2 болатын қимадағы Мах саны 0,5-ке тең. Шыға берісіндегі қысым (back pressure) 270 кПа (абс) болса, осы жердегі көлденең қимасының ауданын табыңыз.

13. Ауа жіңішкеретін құбырдан изэнтропиялық түрде атмосфераға ағып шығады. Ауданы S=0.05 м^2 болатын қимада T=3.3^{0}С және V=200 м/с. Осы жердегі қысым мен Мах санын табыңыз. Құбырдың жіңішкерген жерінің көлденең қимасының ауданын және массалық шығынын табыңыз.

14. Ауа жіңішкеретін құбырдан изэнтропиялық түрде атмосфераға ағып шығады. Абсолют қысым 250 кПа болатын қимада температура 20^{0}С және ауа жылдамдығы 200 м/с. Құбырдың жіңішке жеріндегі қысымын есептеңіз.

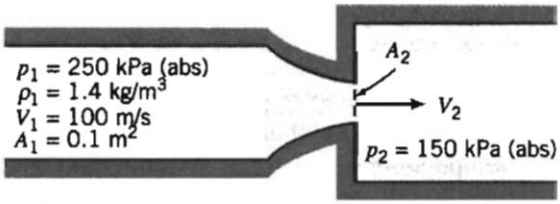
15. Ауа үлкен ыдыстан (p=650кПа, T=550^{0}C) жіңішкеретін құбыр арқылы атмосфераға ағып шығады. Құбырдың жіңішке жерінің ауданы 600 мм^2. Құбырдағы изэнтропиялық ағыстың массалық шығынын анықтаңыз.

16. Ауа үлкен ыдыстан жіңішкеретін құбыр арқылы атмосфераға ағып шығады. Ағысты адиабаталық және қайтымды деп қарастырыңыз. Ыдыстағы қысымның қандай мәнінде құбырдың шыға берісіндегі ағыс дыбыс жылдамдығындай болады? Егер ыдыстағы қысым 600 кПа, температура 600 К және шыға берістегі құбыр ауданы $1.29 \cdot 10^{-3}$ м^2 болса, құбырдағы ағыстың массалық шығынын табыңыз.

17. Ауа изэнтропиялық түрде жіңішкеретін құбырдан ағып резервуарға құйылады. Резервуардағы қысым 240 кПа. Ауа 95^{0}C температурада құбырға 406 кПа қысыммен елеусіз аз жылдамдықта енеді. Егер құбырдың жіңішкерген бөлігінің ауданы 0.01 м^2 болса, құбырдағы ауаның массалық шығынын анықтаңыз.

18. Ауа үлкен ыдысқа жалғанған жіңішкеретін құбыр арқылы изэнтропиялық түрде атмосфераға ағады. Үлкен ыдыста қысым 171 кПа, температура 27^{0}C. Құбырғы кіре беріс қимада Mах саны 0.2. Құбырдың шыға беріс қимасының ауданы 0,015 м^2. Құбырды қозғалтпай орнында ұстап тұру үшін қажетті күшті табыңыз.

19. Идеал газ ($k = 1.4$) изэнтропиялық түрде жіңішкеретін құбырдан қысымы p_2=150кПа болатын үлкен каналға ағып шығады (Сурет 179). Газ ауа емес және газ тұрақтысы R – шамасы белгісіз. Ағыс барлық құбыр бойында орнықталған және біртекті. Құбырдың шыға берістегі көлденең қимасының ауданы мен сол жердегі жылдамдықты табыңыз.



Сурет 179

20. Ауданы тұрақты құбырда ауаның үйкеліссіз ағысын қарастырыңыз. Бірінші қимада M_1=0.5, p_1=1.1 МПа және T_{01}=333 К. Жылу алмасу эффектісінің әсерінен екінші қимадағы Мах саны M_2=0.5 және T_{02}=478 К. Бірінші және екінші қималар арасындағы сұйықтан келетін не сұйыққа берілетін бірлік массаға келетін жылу алмасу мөлшерін және p_1-p_2 қысымдар айырымын табыңыз.

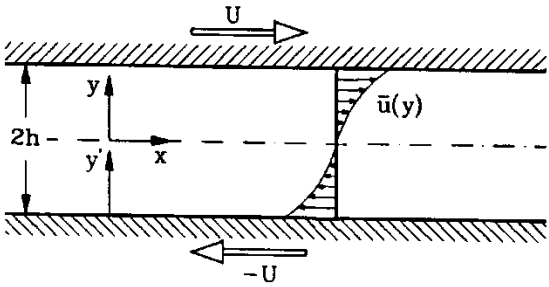
4 - ТАРАУ

ТУРБУЛЕНТТІЛІК ЖӘНЕ ШЕКАРАЛЫҚ ҚАБАТ ТЕОРИЯСЫ

6.1. Турбулентті ағыстардың негізгі заңдары

6.1-1-есеп. Турбулентті Куэтт ағысы

Қарама-қарсы қозғалатын шексіз ұзын екі параллель пластиналар арасындағы турбулентті Куэтт ағынының жылдамдығын анықтауға болады. Тығыздығы ρ тұрақты сұйық ағыны уақыт бойынша орталандырылған орнықталған жылдамдық өрісіне ие. Ол тек көлденең y координатасының функциясы болып табылады. Массалық күштерді ескермеуге болады.



Сурет 180

Турбулентті кернеу (Рейнольдс кернеуі) Прандтльдің араласу жолының ұзындығы туралы теориясы негізінде анықталады. Араласу жолының ұзындығы

$$l(y) = K(h^2 - y^2)$$

заңдылығымен беріледі.

Сонда:

a) $-(dl/dy)_{y=\pm h} = \pm k$ шартын қанағаттандыратын K тұрақтысын табыңыз.

b) Араласу жолының ұзындығының берілген заңдылығы үшін турбулентті сырғу кернеуінің τ_t теңдеуін табыңыз.

c) Куэтт ағынында $\bar{p}$ қысымы тұрақты болғандықтан, турбулентті ығысу кернеуі де тұрақты болады. Нәтижесінде $\eta \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'} = \rho u_*^2 = const$ екендігін көреміз. Тұтқырлы қабатшадан тыс жерлерде тұтқырлы ығысу кернеуін $\eta \frac{d\bar{u}}{dy}$ турбулентті ығысу кернеуімен салыстырғанда елемеуге болады. Осы жағдайды пайдаланып, жылдамдық $\bar{u}(y)$ анықтаңыз. (Ұсыныс: $\bar{u}(y) = 0$ екендігі симметрия шартынан шығатындығын ескеріңіз).

d) Жылдамдықтың таралуын қабырғадан бастап есептегендегі арақашықтықтың $y' = y + h$ функциясы ретінде анықтаңыз.

e) y' кіші мәндерінде өлшемді-біртекті логарифмдік заңдылықтың байқалатындығын көрсетіңіз (Ұсыныс: c) пунктіндегі жылдамдықтың таралуы тұтқырлы қабатшада ($\frac{y'u_*}{\nu} = \beta$) осы қабаттағы жылдамдықтың таралуына тең болады).

Берілгендері: h, k, U, u_*, ρ, ν.

Шешуі

a) K тұрақтысын анықтау. Қабырға маңында араласу жолының ұзындығы мынадай болуы керек:

$$l = ky', \left(\frac{y'}{h} \ll 1\right),$$

бұдан шығатыны

$$\left(\frac{dl}{dy}\right)_{y=-h} = k, \left(\frac{dl}{dy}\right)_{y=+h} = -k.$$

Онда берілген араласу жолының ұзындығынан келесі теңдік шығады:

$$\left(\frac{dl}{dy}\right)_{y=\pm h} = K(-2y)_{y=\pm h} = \pm 2Kh = \pm k \Rightarrow K = \frac{k}{2h}. \quad (1)$$

b) Турбулентті ығысу кернеуін табу. Прандтльдің араласу жолының формуласы:

$$\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Бұл жағдайда $d\bar{u}/dy$ әрқашан оң мәнге ие болады. Берілген $l(y)$ таралуын (1) теңдеудегі K коэффициентін ескере отырып, жоғарыдағы теңдеуге қойсақ, табатынымыз:

$$\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \rho\left[\frac{k}{2h}(h^2 - y^2)\right]\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right). \quad (2)$$

c) Жылдамдық $\bar{u}(y)$ профилін табу. Қысымдар айырымы нөлге айналатын болғандықтан, тұтқырлы және турбулентті ығысу кернеулерінен тұратын толық ығысу кернеуі каналдың биіктігі бойынша тұрақты болып қалады:

$$\eta\frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'} = \tau_w = \rho u_*^2 = const. \quad (3)$$

Тұтқырлы және буферлік қабаттардан тыс жерлерде (3) теңдеудегі тұтқырлықтың әсерін елемеуге болады. Соны ескеріп, турбулентті бөлігі үшін мына қатынасты аламыз:

$$-\rho\overline{u'v'} = \rho u_*^2,$$

сонда (2) қатынасты ескере отырып, келесі өрнекті аламыз:

$$\rho\left[\frac{k}{2h}(h^2 - y^2)\right]^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \rho u_*^2 \;\Rightarrow\; \frac{k}{2h}(h^2 - y^2)\frac{d\bar{u}}{dy} = u_*$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_*}\int d\bar{u} = \frac{2h}{k}\int \frac{dy}{h^2 - y^2} + const.$$

Жоғарыдағы интегралды есептеп, жылдамдықтың таралуын аламыз:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k}ln\left(\frac{h+y}{h-y}\right) + const,$$

мұндағы $const = 0$ екенін симметрия шартынан $\bar{u}(y = 0) = 0$ шығатындығын көреміз.

d) $\bar{u} = \bar{u}(y')$ тәуелділігін табу. Жоғарыда табылған жылдамдықтың таралу заңдылығына $y' = y + h$ шамасын қойып, келесіні аламыз:

$$\frac{\bar{u}(y')}{u_*} = \frac{1}{k}ln\left(\frac{y'}{2h - y'}\right) = \frac{1}{k}ln\left(\frac{\frac{y'}{h}}{2 - (y'/h)}\right). \qquad (4)$$

e) Жоғарыдағы (4) қатынасты келесі түрге түрлендіріп

$$\frac{\bar{u}(y')}{u_*} = \frac{1}{k}\left[ln\left(\frac{y'}{2h}\right) - ln\left(1 - \frac{y'}{2h}\right)\right] \qquad (5)$$

және $y'/h \ll 1$ жағдайын қарастырсақ, мынаны аламыз

$$\frac{\bar{u}(y')}{u_*} = \frac{1}{k}\left[ln\left(\frac{y'}{2h}\right)\right].$$

Енді бұл қатынасты келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{\bar{u}(y')}{u_*} = \frac{1}{k}\left[ln\left(\frac{y'u_*}{\nu}\right) + ln\left(\frac{\nu}{2hu_*}\right)\right]. \qquad (6)$$

Жылдамдықтың бұл таралу заңдылығы тұтқырлы қабатшадағы жылдамдықтың таралуымен беттесуі тиіс. Тұтқырлы қабатшадағы жылдамдықтың таралуы $(\bar{u} + U)/u_* = y'u_*/\nu = y_*$ сызықты болғандықтан, мұндағы y_* төменгі қабырғадан бастап есептегендегі өлшемсіз қашықтықты, ал U қабырғадағы жылдамдықты білдіреді.

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = y_* - \frac{U}{u_*}. \qquad (7)$$

Тұтқырлы қабатшаның өлшемсіз қалыңдығын β деп алсақ, (6) және (7) қатынастарынан төмендегіні аламыз:

$$\beta - \frac{U}{u_*} = \frac{1}{k}ln\beta + \frac{1}{k}ln\left(\frac{\nu}{2hu_*}\right)$$

және бұл логарифмдік заңдылықтағы B тұрақтысын былайша енгізсек, онда жоғарыдағы заңдылық

$$\frac{1}{k} ln\left(\frac{\nu}{2hu_*}\right) + \frac{U}{u_*} = \beta - \frac{1}{k} ln\beta = B$$

түріне ие болады.
(6) қатынасты ескерсек, мынаны аламыз:

$$\frac{\bar{u} + U}{u_*} = \frac{1}{k} ln\left(\frac{y' u_*}{\nu}\right) + B. \qquad (8)$$

Осыдан қабырға маңындағы логарифмдік заңдылықтың оның белгілі түрінен тек жоғарыдағы пластина жылдамдығының U/u_* қосылуы арқылы өзгешеленетіндігін көреміз.

6.1-2-есеп. Рейнольдс санының белгілі мәні үшін турбулентті Куэтт ағысының жылдамдығының таралуы

6.1-1 есебінің нәтижесін пайдаланып, Рейнольдс санының берілген $Re = 2hU/\nu = 34000$ мәні үшін $\bar{u}(y')/U$ жылдамдықтың таралуын табу керек. Бұл үшін, алдымен тұтқырлы қабатша заңы ($\frac{\bar{u}(y')}{u_*} = \frac{1}{k}\left[ln\left(\frac{y' u_*}{\nu}\right) + ln\left(\frac{\nu}{2hu_*}\right)\right]$) мен қабырғаның логарифмдік заңын ($\frac{\bar{u}+U}{u_*} = \frac{1}{k} ln\left(\frac{y' u_*}{\nu}\right) + B$) пайдаланып u_* үшін арналған теңдеуді табуымыз керек. Содан кейін, осы теңдеуден $2hu_*/\nu$ шамасының мәнін және $0 < y' < 2h$ аралығында жылдамдықтың $\bar{u}(y')/U$ таралуын анықтау керек.

6.1-3-есеп. Құбырдағы турбулентті ағыс

Диаметрі d құбыр бойымен сығылмайтын сұйық ағып жатыр. Құбыр гидравликалық тегіс ($k/d = 0$), сонымен қатар, сұйықтың көлемдік шығыны $\dot{V}$ белгілі. Сонда: